(4) طريقة نيوتن - رافسون :
Newton-Raphson Method.

تعتمد فكرة هذه الطريقة على اختيار قيمة تقريبية للجذر x_0 بشرط ان لا تكون بعيدة جداً عن القيمة المضبوطة ثم تحسينا هذه القيمة الى قيمة جديدة x_1 باستخدام العلاقة

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

بعد ذلك نعتبر القيمة الاخيرة x_1 قيمة قديمة نستخدمها [بعد ان نضعها مكان x_0] في العلاقة اعلاه لايجاد x_1 جديدة تكون افضل من سابقتها ثم نعتبر هذه قديمة ونستخدمها لنستخرج قيمة جديدة بنفس الطريقة وهكذا حتى نحصل على الفرقة بين القيمة الاخيرة والتي قبلها صغيرة جداً حيث يمكن اعتبار القيمة الاخيرة هي التقريب المناسب للجذر.

الخوارزمية :-

1. ادخل قيمة x , ϵ , n
2. احسب $f(x_0)$, $f'(x_0)$
3. ضع $i=1$
4. اذا كان $i \leq n$ كرر الخطوات 5-6
5. احسب $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
6. اذا كان $|x - x_0| < \epsilon$ فان x هو الجذر ثم توقف

والا ضع $x_0 = x$ و $i = i+1$ واذهب الى 3 .

اشتقاق صيغه طريقه نيوتن

اذا كانت الداله f ومشتقاتها العليا مستمره في الفتره $[a, b]$ وكانت x_0 نقطه من نقاط تلك الفتره فيمكن التعبير عن قيمه الداله عند اي نقطه من نقاط الفتره تبعد بمسافه h عن x_0 حسب متسلسله تايلر.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + h^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \cdots$$

نفرض ان x_0 هي قريبه من الجذر المضبوط λ

$$\lambda = x_0 + h$$

وبتطبيق متسلسله تايلر

$$f(\lambda) = f(x_0) + h f'(x_0) + h^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \cdots$$

وبما ان x_0 قريبه من λ فان h صغيره جدا بحيث تربيعها وتكعيبها والقوى الاخرى تكون صغيره جداً بحيث يمكن اهمال الحدود التي تحويها.

$$f(\lambda) = f(x_0) + h f'(x_0)$$

$\because$ λ هي جذر فان

$$f(\lambda) = 0$$

$$f(x_0) + h f'(x_0) = 0$$

$\because h = \lambda - x_0$

$$\Rightarrow h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow$$

$$\lambda - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow \lambda = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

واذا اخذنا x_1 هو الجذر الاقرب للجذر المضبوط λ من x_0 نحصل على

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

مثال / باستخدام طريقة نيوتن - رافسون جد جذر الدالة

$f(x) = x^3 - 3x + 2$. خذ $x_0 = -2.4$ ، $\epsilon = 0.00005$

~~تقريب~~

sol)

$\because f(x) = x^3 - 3x + 2$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3$, $x_0 = -2.4$

$\underline{i=1}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -2.4 - \frac{[(-2.4)^3 - 3(-2.4) + 2]}{3(-2.4)^2 - 3}$$

$$\boxed{x_1 = -2.0763}$$

$$|x_1 - x_0| = |-2.0763 + 2.4| = 0.3238 \nless \epsilon$$

$\underline{i=2}$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -2.0763 - \frac{f(-2.0763)}{f'(-2.0763)}$$

$$\boxed{x_2 = -2.003699}$$

$$|x_2 - x_1| = |-2.003699 + 2.0763| = 0.072 \nless \epsilon .$$

$\underline{i=3}$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow \boxed{x_3 = -2.000009}$$

$$|x_3 - x_2| = |-2.000009 + 2.003699| = 0.0036 \nless \epsilon .$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -2 \Rightarrow \boxed{x_4 = -2}$$

$$|x_4 - x_3| = |-2 + 2.000009| = 0.000009 < \epsilon$$

$\therefore \quad x_4 = -2$

هو الجذر المطلوب.

الحالات الخاصه لطريقة نيوتن - رافسون .

1- ايجاد الجذور التربيعية :-

لايجاد الجذر التربيعي لاي رقم وليكن A وان $A > 0$ وباستخدام نيوتن رافسون نأخذ الداله $f(x) = x^2 - A$ اي ان

$$f(x) = x^2 - A \Rightarrow x = \sqrt{A}$$

وبتطبيق صيغه NR

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} \Rightarrow$$

$$\therefore x_{n+1} = \frac{1}{2}\left\{x_n + \frac{A}{x_n}\right\}$$

مثال جد الجذر التربيعي للعدد 5 ، $\epsilon = 10^{-6}$ ، $x_0 = 2$

0.000001

sol نفرض ان الداله

$$f(x) = x^2 - 5$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{A}{x_n}\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[2 + \frac{5}{2}\right] \Rightarrow \boxed{x_1 = 2.25}$$

$$|x_1 - x_0| \nless \epsilon$$

(2) $x_2 = \frac{1}{2}\left[x_1 + \frac{5}{x_1}\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\left[2.25 + \frac{5}{2.25}\right]$

$\boxed{x_2 = 2.236111}$

$|x_2 - x_1| \nless \epsilon$ 2.236111

$x_3 = \frac{1}{2}\left[x_2 + \frac{5}{x_2}\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\left[2.236111 + \frac{5}{2.236111}\right]$

$\boxed{x_3 = 2.236068}$, $|x_3 - x_2| \nless \epsilon$ 2.236068

$x_4 = \frac{1}{2}\left[x_3 + \frac{A}{x_3}\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\left[2.236068 + \frac{5}{2.236068}\right]$

$\boxed{x_4 = 2.223896}$, $|x_4 - x_3|$ 2.236068

$= |2.223896 - 2.236068| = 0.012172 < \epsilon$

$\therefore x_4$ is a root.

2) ايجاد الجذر لأي رتبة :-

اذا كان $f(x)=x^{K}-A$ ، $A>0$ ، K عدد صحيح بنفس الاسلوب المتبع في الحالة الاولى.

$$x_{n+1}=\left(1-\frac{1}{K}\right)x_n+\frac{A}{K}x_n^{1-K}$$

$K=2,3,4,\ldots$, $n=0,1,2,\ldots$

مثال / أوجد الجذر التكعيبي للعدد 7 علماً ان $x_0=1.5$, $\epsilon=10^{-3}$

sol) $A=7$, $K=3$, $\sqrt[3]{7}$

$$f(x)=x^3-7$$

$\boxed{n=0}$

$$x_1=\left(1-\frac{1}{3}\right)x_0+\frac{7}{3}x_0^{1-3}$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)(1.5)+\frac{7}{3}(1.5)^{-2}=2.03704$$

$$|x_1-x_0|=|2.03704-1.5|\nless\epsilon$$

⋮

H.W

3- ايجاد مقلوب العدد باستخدام طريقة NR .

اذا كان الرقم هو A ومقلوبه هو $X=\frac{1}{A}$ ونعتبر الدالة

$f(x)=\frac{1}{x}-A$ فأن

$$X_{n+1} = X_n (2 - A X_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

H.W

مثال/ استخدم طريقة NR لايجاد مقلوب العدد 2 علماً ان $\epsilon = 10^{-4}$.

$X_0 = 0.1$.

H.W

مثال/ استخدم طريقة NR لايجاد جذر المعادلة

$f(x) = x \sin x - 1$

علماً ان $X_0 = 1$, $\epsilon = 10^{-5}$.