Chapter 2

" الحلول العددية للمعادلات اللاخطية "

" Solutions of Nonlinear Equations "

هناك العديد من المسائل الرياضية التي يتطلب حلها الى ايجاد الجذور للمعادلة اللاخطية $f(x)=0$ ولكن في أغلب الاحيان لا يمكن ايجاد هذه الجذور بالطرق الجبرية لذا نلجأ الى ايجاد الجذور باستخدام الطرق العددية وعمل خوارزمية وبرنامج حاسوبي باحدى لغات البرمجة.

* المعادلات اللاخطية :- هي المعادلات التي تكون درجتها اكبر من واحد او تحتوي على دوال مثلثية مثل

$(x^2, x^3, \ldots, e^x, \sin x, \cos x, \ldots, \ln x, \ldots)$

- $f(x) = x^2 + x + 1 = 0$
- $f(x) = x - \sin x = 0$
- $f(x) = e^x + x = 0$

$\vdots$

الجذر :-

يسمى العدد α جذراً حقيقياً او مضبوطاً للمعادلة $f(x)=0$ اذا كان $f(\alpha)=0$.

ملاحظة / اذا كان α جذراً مضبوطاً للمعادلة $f(x)=0$ فان α_n جذراً تقريبياً لها اذا كان

$$|\alpha - \alpha_n| \leq \Delta$$

or

$$|f(\alpha_n)| \leq R$$

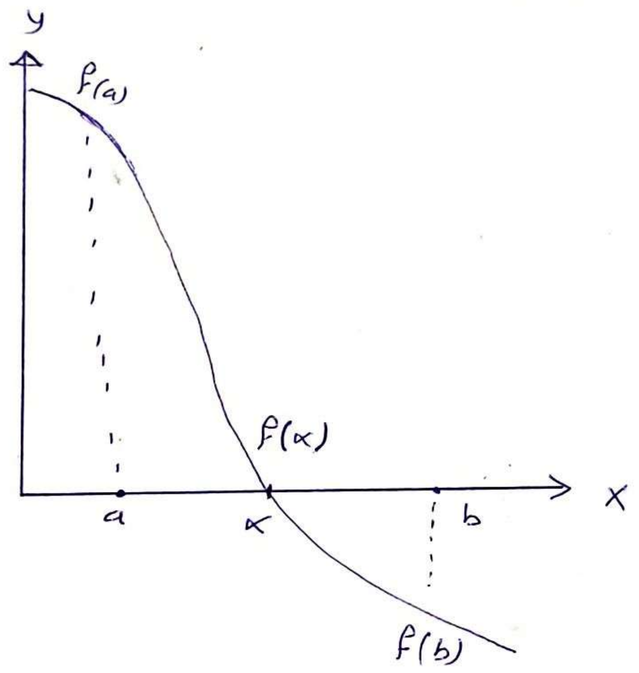
حيث ان Δ , R مقادير صغيرة جداً تمثل دقة الحل التقريبي

تعيين مواقع الجذور للمعادلة $f(x)=0$.

نفرض ان الدالة f مستمرة على فترة محدودة وان جذورها حقيقية فهنالك اساليب لتعيين مواقع الجذور.

1. نظرية القيمة المتوسطة :- (بدون برهان).

اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة $[a,b]$ وكانت $f(a)$ ، $f(b)$ مختلفتين بالاشارة اي ان $(f(a).f(b)<0)$ فانه يوجد جذر واحد على الاقل مثل α يحقق المعادلة $f(\alpha)=0$ وانه $a<\alpha<b$.



2. اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متعددة حدود فيمكن تعيين مواقع جذور المعادلة $f(x)=0$ بالاستناد على النظرية التالية.

نظرية اذا كانت α جذراً للمعادلة

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

فان

$$|\alpha|\leq 1+\max\{|a_i|\}=1+\lambda$$

$$\lambda=\max|a_i|$$

ال /

اذا كانت الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$

فعين مواقع جذور المعادلة .

sol)

$$|\alpha| \le 1 + \max \{|a_i|\}$$

$$\le 1 + \max \{|1|, |-2|, |3|, |1|\}$$

$$\le 1 + 3$$

$$|\alpha| \le 4$$

$$\therefore \quad -4 \le \alpha \le 4$$

H.W

اذا كانت $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1 = 0$ فعين مواقع الجذور للمعادلة .

ثانياً: تعيين مواقع الجذور من خلال تغيير اشارة الدالة $y=f(x)$.

ندرس اشارة قيمة الدالة $f(x)$ عند عدد من النقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$

فاذا كانت $f(x_i) f(x_{i+1}) < 0$ عندئذ يوجد جذر في الفترة $[x_i, x_{i+1}]$

ويعتمد هذا الاسلوب على مبرهنة القيمة المتوسطة التي تفترض ان تكون الدالة مستمرة على الفترة $[x_i, x_{i+1}]$ وان

$$f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$$

* هل كل دالة قابلة للاشتقاق مستمرة ام لا وهل العكس صحيح؟
ج) نعم ولكن العكس غير صحيح $f(x)=|x|$.

مثال / عين مواقع الجذور للمعادلة

$$f(x)=x^4-7x^3+3x^2+26x-10=0$$

على الفترة $[-8, 8]$ عندما $h=4$.

sol /

$$x_{i+1} = x_i + h \quad , \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_0 = -8$$

$\boxed{i=0} \rightarrow x_1 = x_0 + h \Rightarrow x_1 = -8+4 = -4$

$\boxed{i=1} \rightarrow x_2 = x_1 + h \Rightarrow x_2 = -4+4 = 0$

$\boxed{i=2} \rightarrow x_3 = x_2 + h \Rightarrow x_3 = 0+4 = 4$

$\boxed{i=3} \rightarrow x_4 = x_3 + h \Rightarrow x_4 = 4+4 = 8$

نعوض عن قيمة x_i في الدالة المعطاة في السؤال ثم نجد الاشارة $f(x_i)$ ←

x_i	-8	-4	0	4	8
$f(x_i)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

$f(-8) = (-8)^4 - 7(-8)^3 + 3(-8)^2 + 26(-8) - 10 = +$

$f(-4) = +$

$f(0) = -$

$f(4) = -$

$f(8) = +$

∴ يوجد جذران لهذه المعادلة في الفترتين

$[-4, 0]$, $[4, 8]$

ملاحظة/ اذا كانت h صغيرة نسبياً فذلك يعطي عدداً اكبر من الفترات الجزئية مما يؤدي الى زيادة العمليات الحسابية وزيادة الزمن اللازم للاجراءات واذا كانت h كبيرة نسبياً فذلك يعطي عدداً اقل من الفترات الجزئية وقلة من الزمن اللازم للاجراءات الا ان هذا يؤدي الى فقدان بعض الجذور.

مثال/ نفس المثال السابق عند $\boxed{h=2}$

H.W

ضمن ... متلغتان

* الطرائق التكرارية لايجاد الجذور التقريبية للمعادلات اللاخطية.

(2) طريقة تنصيف الفترات :-

Bisection Method

لتكن $f \in C[a,b]$ وان $f(a).f(b) < 0$ اذا فان هناك جذر هو

$$c = \frac{a+b}{2}$$

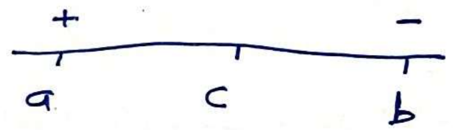
فاذا كان $f(c) = 0$ فان c هو الجذر المطلوب واذا لم تكن فاننا ناخذ الفترتين $[ca, cb]$ ثم نجري عملية التنصيف مرة اخرى على احدى هذه المجالين ونستمر الى ان تحقق شرط التقارب

$$|c_n - c_{n-1}| \leq \epsilon$$

او

$$|f(c_n)| \leq \delta$$

حيث ان ϵ و δ مقادير صغيرة جدا تمثل دقة الحل التقريبي.



* خوارزمية طريقة التنصيف.

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة ضمن الفترة المغلقة $[a,b]$

1. ادخال a و b و N_0 (اكبر عدد التكرارات). و ϵ (دقة الحل).
2. حساب $f(a).f(b) < 0$ ، ضع $i = 1$ والا توقف مع ابدال قيم a, b.
3. اذا كان $i < N_0$ كرر الخطوات $(4-7)$
4. ضع $c = \frac{a+b}{2}$ واحسب $f(c)$

5. اذا كان $(f(c)=0)$ او $(|b-a|<\epsilon)$ فأن c هو الجذر، وتوقف.

6. والا ضع $i:=i+1$

7. اذا كان $f(c)\cdot f(a)>0$ ضع $a=c$ والا ضع $b=c$.

مثال/ التقارب والخطأ المتوقع في طريقة التنصيف المجال.

مبرهنة/ لتكن $f\in C[a,b]$ وان $f(a)\cdot f(b)<0$ فان طريقة تنصيف المجال.

1- تولد متتابعة $\{c_n\}_{n}^{\infty}$ تقترب للجذر المضبوط α.

2- تحقق

$$e_n=|c_n-\alpha|\leq\frac{b-a}{2^n}<\epsilon\quad,\ \forall n\geq 1$$

يمكننا تقدير عدد التكرارات n اللازمة للوصول الى دقة معينة ϵ وكما يلي

$$e_n\leq\frac{b-a}{2^n}<\epsilon$$

$$\boxed{n>\frac{\ln(b-a)-\ln\epsilon}{\ln 2}}$$ قانون مهم

~~الطريقة~~

مثال/ جد جذر المعادلة $f(x)=x^2-2$ الواقع ضمن الفترة

$[1,4]$ وبدقة $\epsilon=0.412$

Sol/ C

* $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+4}{2}=2.5$

$f(c)=5.25$

	a x_1	b x_2	نهمل
x	1	2.5	4
$f(x)$	-1	$+4.25$	$+14$
	$f(a)$	$f(b)$	

نأخذ القيم الجديدة لـ x_1, x_2

اذا تحققت الشرط نتوقف

$a-b=$

* $\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le\epsilon = \left|\frac{1-2.5}{2}\right|=0.75 \nleq 0.412$

نكرر العملية

$b=c$

* $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+2.5}{2}=1.75$

	x_1	x_2	يهمل
x	1	1.75	2.5
$f(x)$	-1	$+2.0625$	$+4.25$

$\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le\epsilon \Rightarrow \left|\frac{1-1.75}{2}\right|=0.375\le 0.412$

the End.

لو اردنا حساب n عدد التكرارات

$$n > \frac{\ln(b-a) - \ln \epsilon}{\ln 2}$$

$a = 1 \quad , \quad b = 4$

$$n > \frac{\ln(4-1) - \ln(0.412)}{\ln 2}$$

$$n > \frac{1.0986122887 + 0.8867319296}{0.6931471806}$$

$$n > 2.864246258$$

$$n \simeq 3$$