

# Numerical Analysis

مقدمه :- في العديد من المسائل الرياضية التي يمكن عرضها بوجود الحل  
حل وفي بعض الاحيان يوجد مسائل من المستحيل ايجاد الحل  
لذلك بواسطة الطريقة المعروفة كطرق الجبر والحساب.

اننا لنستطيع الحصول على الحل المضبوط لشيء ما نبدأ عند  
الحاجة الى ايجاد الحل التقريبي (العددي) للمسألة الرياضية  
المراد ايجاد الحل لذلك.

\* نلاحظ ان الحل المضبوط للمعادلة  $\int_0^6 x^2 dx$  نظرياً موجود وذلك  
لان دالة المتكامل  $x^2$  مستمرة ضمن الفترة  $[0, 6]$  ولان لا نستطيع  
ايجاد دالة الحل له بالطرق المعروفة لذا نبدأ الى ايجاد حل تقريبي  
(حل عددي له).

التحليل العددي :- التحليل العددي هو الموضوع المتعلقة بدراسة الطريقة  
المستخدمة في ايجاد الحلول العددية التقريبية والنظريتين  
المتعلقة بذلك.

الخوارزمية :- هي مجموعة من التوجيهات لتنفيذ عمليات حسابية  
مهمه بشكل يؤدي الى حل المسألة المعطاة وبعد محدد  
من الخطوات.

## الخطأ

ان الحل العددي لمسألة ما يكون عادةً قيمة تقريبية المصنوع وتكون هذه القيمة عملة بأخطاء من المصنوع قياسية لمعرفة دقة الحل العددي. ويعرف الخطأ بصورة عامة بأنه طائل طرح القيمة التقريبية من القيمة المصنوع ولأجل تقليل الخطأ في الحل العددي علينا معرفة المصادر المسببة لهذا الخطأ.

## Absolute Error

هو عبارة عن الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية

لتكن  $x$  قيمة فعلية  
 $x_0$  قيمة مقربة فإن

Approximate solution      Exact solution

$$\Delta x = |x - x_0|$$

$$\Delta = |\Delta x| = |x_0 - x| = |x - x_0|$$

## Relative error

## الخطأ النسبي

هو عبارة عن الخطأ المطلق مقسوماً على القيمة المطلقة الفعلية.

$$R = \frac{\Delta x}{|x|}$$

مثال لتكن  $x = 3.257$  وتكن  $x_0 = 3.26$  قيمة تقريبية لـ  $x$   
 عين الخطأ المطلق والخطأ النسبي.

1- الخطأ المطلق.

$$\Delta = |\Delta x| = |x_0 - x| = |3.26 - 3.257| = 0.003$$

2- الخطأ النسبي.

$$R = \frac{\Delta}{|x|} = \frac{0.003}{3.257} = 0.000921$$

الخطأ النسبي افضل من الخطأ المطلق لانه يعطين نتائج اذقه ويكون  
يجب تجنب التعامل مع الخطأ النسبي عندما تكون القيمة  
الضعيفة قريبة من الصفر لان تكون كليه غير معروفة.

العدد النسبي يكون بصوره  $\frac{a}{b}$  والغرض من مثل  $\pi$   
هو ان يكون له معنى لا يكون بصوره  $\frac{a}{b}$

### Percentage error

(3) الخطأ النسبي

هو عبارة عن الخطأ النسبي مضروباً في 100 .

$$E = R \times 100\%$$

مثال / اذا كانت  $x = 0.00004$  ،  $x_0 = 0.00005$  قيمة تقريبية  
لـ  $x$  عن الخطأ المطلق ، النسبي ، والنسبي .

الخطأ المطلق .

$$\Delta = |\Delta x| = |x_0 - x| = |0.00005 - 0.00004|$$

$$= 0.00001$$

الخطأ النسبي .

$$R = \frac{\Delta}{|x|} = \frac{0.00001}{0.00004} = 0.25$$

الخطأ النسبي .

$$E = R \times 100\% = 0.25 \times 100 = 25\%$$

# Rounding error

(4) الخطأ التقريب

هو الخطأ الناتج من تقريب العدد لعدد منتهٍ من الخانات العشرية) وفادته التقريب تكون على الشكل

أرنا تقريب العدد بـ  $n-1$  العدد المقرب يكون بالصورة

$$X = 0.x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n$$

$$X_0 = 0.x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_{n-1}$$

فإن الخطأ الناتج من التقريب على حسب القامده هو

$$0.5 \times 10^{-(n-1)} = 0.5 \times 10^{-n+1} = 5 \times 10^{-n}$$

مثال قرب العدد  $x = 4.3427$  الى ثلاثة خانات عشرية، خانتيين عشريتين، خانة واحدة وما هو الخطأ الناتج من التقريب

$5 \times 10^{-4}$	←	$X_0 = 4.343$
$5 \times 10^{-3}$	←	$X_0 = 4.34$
$5 \times 10^{-2}$	←	$X_0 = 4.3$

$$4.343 \pm 5 \times 10^{-4}$$

مثال نكن  $x = 0.235$  عدد مقرب من الخطأ النسبي الناتج

sol)  $0.005$   $\Delta x \leq 5 \times 10^{-4}$

$$R = \frac{5 \times 10^{-4}}{0.235} = 0.0021276$$

# خطأ في العمليات الحسابية

## Arithmetic Operation error.

1. الخطأ المطلق في حاصل جمع (طرح) عددين مقربين أقل من أو يساوي مجموع الأخطاء المطلقة للعددين.

لنأخذ  $x_0$  فيه تقريب  $x$   
و  $y_0$  فيه تقريب  $y$

ولنحسب الخطأ الناتج باعتبار  
تقريبه  $z = x + y$   
فيه  $z_0 = x_0 + y_0$

$$\begin{aligned}\Delta z &= z - z_0 = (x + y) - (x_0 + y_0) \\ &= (x - x_0) + (y - y_0)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\Delta z| \leq |\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$$

وإذا كان فيه تقريب  $z_0 = x_0 - y_0$

$$z = x - y$$

$$\begin{aligned}\Delta z &= z - z_0 = (x - y) - (x_0 - y_0) \\ &= (x - x_0) - (y - y_0) \\ &= \Delta x - \Delta y\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\Delta z| = |\Delta x - \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$$

$$(x - x_0) - y - (-y_0)$$

$$= (x - x_0) - y + y_0$$

$$(x - x_0) - (y - y_0)$$

5

الخطأ النسبي  
الخطأ النسبي  
الخطأ النسبي

مثال / ليكن لدينا العددين  $x = 3.221$  ،  $y = 3.222$  ،  
الخطأ المطلق والنسبي لمقادير  $x+y$  و  $x-y$  ،  
باعتبارهما عددين مدورين .

501  $|\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$

الخطأ المطلق في تدوير العددين  $x+y$  ،  $x-y$  .

~~$|\Delta x + \Delta y|$~~   $\Delta x = \Delta y = 5 \times 10^{-4}$

الخطأ المطلق لمقادير  $x+y$  ،  $x-y$

$|\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| = 5 \times 10^{-4} + 5 \times 10^{-4} = 0.001$

$|\Delta x - \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| = 0.001$

الخطأ النسبي في حالة الجمع .

$R = \frac{|\Delta x + \Delta y|}{x+y} \leq \frac{0.001}{6.443} = 0.0001552$

الخطأ النسبي في حالة الطرح .

$R = \frac{|\Delta x - \Delta y|}{|x-y|} \leq \frac{0.001}{0.001} = 1$

الخطأ النسبي لجذر عدد بين تقريبين اقل من اوسياوي مجموع  
الخطا النسبيه

٦-  
!

لنكن  $x_0$  قيه تقريبيه لـ  $x$   
 $y_0$   $=$   $=$   $=$   $y$   
 وفرض  $z_0 = x_0 \cdot y_0$

$z = x \cdot y$  قيه تقريبيه لـ  $z = x_0 \cdot y_0$

$$z = x \cdot y = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)$$

$$= x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y$$

رباهماك الحـ  $\Delta x \Delta y$  الذي هو مقدار صغير فأن

$$\Delta z = z - z_0 = x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x - x_0 y_0$$

$$= x_0 \Delta y + y_0 \Delta x$$

$\therefore \Delta = |\Delta z| = |x_0 \Delta y + y_0 \Delta x| \rightarrow$  الخطأ المطلق

$R_{x \cdot y} = \frac{\Delta z}{x_0 y_0} = \frac{|x_0 \Delta y + y_0 \Delta x|}{x_0 y_0} \rightarrow$  الخطأ النسبي

$$\leq \frac{|x_0 \Delta y| + |y_0 \Delta x|}{x_0 y_0} = \frac{|\Delta y|}{y_0} + \frac{|\Delta x|}{x_0}$$

$$R_{x \cdot y} \leq R_x + R_y$$

اي ان

سؤال / عين الخطأ النسبي لحاصل ضرب العددين التقريبيين

$$x = 3.7148 \quad y = 0.281$$

الحل

$$x \cdot y = 1.0438588$$

$$|\Delta x| = 5 \times 10^{-5}$$

$$|\Delta y| = 5 \times 10^{-4}$$

$$R_{x \cdot y} \leq R_x + R_y \Rightarrow \frac{|\Delta x|}{x} + \frac{|\Delta y|}{y} =$$

$$= \frac{0.00005}{3.7148} + \frac{0.0005}{0.281} = 0.0017928$$

يمكن استنتاج الخطأ النسبي

$$R_{x \cdot y} = \frac{|\Delta(x \cdot y)|}{x \cdot y}$$

$$|\Delta(x \cdot y)| = (x \cdot y) R_{x \cdot y}$$

$$= (1.0438588)(0.0017928)$$

$$= \underline{0.0018714}$$



نظام النسب في حاصل قسمة عددين تقريبين اقل من  
 ادياري مجموعي الاخطاء النسبية

الخطأ المطلق

$$* \Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} (R_x - R_y)$$

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0} \Rightarrow \frac{x_0}{y_0} = \frac{x - \Delta x}{y - \Delta y}$$

$$\Rightarrow \frac{x - \Delta x}{y - \Delta y} = \frac{x - \Delta x}{y} \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{\Delta y}{y}} \right)$$

نظام النسب

$$1 + \frac{\Delta y}{y} + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^3 + \dots$$

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{x - \Delta x}{y} \cdot \left( 1 + \frac{\Delta y}{y} + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^3 + \dots \right)$$

$$= \frac{x - \Delta x}{y} + \frac{x \Delta y - \Delta x \Delta y}{y^2} + \frac{x \Delta y^2 - \Delta x \Delta y^2}{y^3} + \dots$$

نظام النسب في حاصل قسمة عددين تقريبين اقل من

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{x - \Delta x}{y} + \frac{x \Delta y}{y^2}$$

$$\therefore \Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} - \left( \frac{x - \Delta x}{y} + \frac{x \Delta y}{y^2} \right)$$

يا وذاك الاطاره وتجزيته الاكبر

$$= \frac{x}{y} - \frac{x}{y} + \frac{\Delta x}{y} - \frac{x \Delta y}{y^2} \Rightarrow \frac{\Delta x}{y} - \frac{x \Delta y}{y^2}$$

$$\therefore \frac{x}{y} \left( \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y} \right)$$

$$\therefore \Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} (R_x - R_y)$$

di

96

V(h)

$$R_{\frac{x}{y}} = R_x - R_y$$

الخطأ النسبي

$$R_{\frac{x}{y}} = \frac{\Delta(\frac{x}{y})}{\frac{x}{y}} = \frac{\frac{x}{y} \left( \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y} \right)}{\frac{x}{y}}$$

$$= \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y} = R_x - R_y$$