Chapter One

S$_{1}$- **Matrices** المصفوفات

(1) Matrix

Def ;- the ***matrix*** is any rectangular array of real or complex number , which has (m) rows and (n) columns , which can be written of the form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ . \\ . \\ a_{m1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Or $A = (a_{ij})_{m*n}$, $I = 1 , \ldots\ldots, m$, $j = 1 , \ldots\ldots\ldots, n$

Def :- the number of rows and columns is called *the **size*** , or ***dimension*** of matrix and denoted by (m * n) (read (m by n) matrix)

Ex :-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1/8 \\ -5 & 1/2 & 0 \\ 9 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{3*3} , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 9/4 & 0 \\ 11 & 4/7 & -13 & 2 \\ 1 & -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}_{3*4}$$

(2) Matrices Operations

(a) Equality of Matrices تساوي المصفوفات

Def :- two matrices are ***equal*** if and only if they have the same dimension and their corresponding elements are equal

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 & 8 & 0 \\ 1/4 & 9 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}_{2*5} , \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 & 8 & 0 \\ 1/4 & 9 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}_{2*5}$$

Ex2 :-

Let $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1/7 \\ 8 & 16 & 0 \end{pmatrix}_{2*3} , \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1/7 \\ 8 & -16 & 0 \end{pmatrix}_{2*3}$

Then A = B

(b) Sum and Subtraction of matrices جمع وطرح المصفوفات

Def :- the matrix A + B , which is the sum of two matrices A and B of the same order , is found by adding corresponding elements of A and B

Now , if $A = (a_{ij})_{m*n}$, $B = (b_{ij})_{m*n}$
Then $A + B = (a_{ij})_{m*n} + (b_{ij})_{m*n}$

$$= \left[(a_{ij} + b_{ij}) \right]_{m*n}$$

Ex :-

Let $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 0 \\ 6 & -4 & 13 \end{pmatrix}_{2*3}$, $B = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}_{2*3}$

Find A + B

Sol:-

$$A + B = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 0 \\ 7 & -7 & 8 \end{pmatrix}_{2*3}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -20 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 18 \end{pmatrix}_{2*3}$$

(C) Multiplication by number الضرب بعدد

Def :- the product of a number k and a matrix A_{m*n} denoted by $(kA)_{m*n}$, is a matrix founded by multiplying each element of A by k

Ex :- Let

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1/8 \\ 5 & 0 & -2 \\ -5 & 1/7 & 6 \end{pmatrix}_{3*3}$$, k = 4 find k. A

Sol :-

$$K A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 1/2 \\ 20 & 0 & -8 \\ -20 & 4/7 & 24 \end{pmatrix}_{3*3}$$

Exc :-

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1/7 \\ -5 & 1/3 & 0 \\ 8 & 11 & -0 \end{pmatrix}_{3*3} , \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6/5 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 9 \\ 1 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3*4}$$

k =-1/5 then find A –B , A+ k B , k(B –A)

(d) Matrices product ضرب المصفوفات

Def :-The product of two matrices A and B is defined only on the assumption that the number of columns in A is equal to the number of rows in B

.Now ; if $A=(a_{ij})_{m*p}$ and $B=(b_{ij})_{p*n}$

then $(AB)=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} = (c_{ij})_{m*n} = C$.

Ex :-

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3*3} , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3*2}$$

Find A*B

Sol :-

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} \end{pmatrix}_{3*2}$$

Ex :- Let

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{2*3} , \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3*2}$$

find A*B

Sol :-

$$A*B = \begin{pmatrix} (2)(-3)+(0)(7)+(-3)(0) & (2)(2)+(0)(3)+(-3)(-1) \\ (-1)(-3)+(0)(7)+(4)(0) & (-1)(2)+(0)(3)+(4)(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}_{2*2}$$

Exc:- (H .W)

Let

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3*3} , \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}_{3*3} , \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}_{3*2}$$

Find (AB),(BC),(CA),(A+B),(AC)+C ,9(AC) ,12(AC)-4(BC)

Theorm (1)

if A , B , C be matrices and K real number then

(1) A + (B + C) = (A + B) + C

(2) A + B = B + A

(3) K (A + B) = K A + K B

(4) A (B C) = (A B) C

(5) A (B + C) = A B + A C

Proof :-

(1) Let A= (aij)m*n , B= (bij)m*n , C =(cij)m*n

L .H .S

A+{B+C}=(aij)m*n + {(bij)m*n + (cij)m*n}

= (aij)m*b + { (bij + cij)m*n } (by Sum law)

= {(aij +bij +cij)m*n } (by Sum law)

since aij ,bij ,cij are elements in R then they have associative property

= { (aij + bij) + cij}m*n

= { (aij +bij)m*n +(cij)m*n }

= { (aij)m*n + (bij)m*n } + (cij)m*n

= { A + B } + C

Remarks :-

(1) matrices multiplication is not commutative

A B ≠ B A

Ex :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} , \quad B\,A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) A B may be equal to 0 with neither A nor B equal to 0

i . e A B = 0 , but A ≠ 0 , B ≠ 0

Ex :-

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} , A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) IF A . B = A . C that is not necessary to be B = C

<u>Ex :-</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 32 & 20 \\ 64 & 40 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 32 & 20 \\ 64 & 40 \end{pmatrix}$$

Kinds of Matrices انواع المصفوفات

<u>(1)</u> ***zero matrix*** :- is a matrix all of whose elements are zero and is denoted by Om*n

<u>Ex:-</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{2*3}$$

$$O_{3*3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>(2)</u> ***square matrix*** :- is a matrix has the same number of rows and columns

<u>Ex:-</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

<u>Remarks :-</u>

(1) square matrix has (***main diagonal***) with its elements a_{11} , a_{22} , a_{33}

(2) the ***trace*** of matrix is the sum of elements of the main diagonal

i.e if $A = (a_{ij})_{n*n}$ $T(A) = \sum a_{ii}$

$= a_{11} + a_{22} + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}$

<u>Ex:-</u> let

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & -8 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$ find T (A)

sol :-

T (A) = (-7) + (5) + (12) = 10

(3) ***Diagonal matrix*** :- is a square matrix which all elements are zero except elements of diagonal

Ex:-

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 44 \end{pmatrix}_{3*3}$$

(4) ***Row matrix*** :- a matrix with only one row and (n) columns

Ex:-

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 & 0 & 1/9 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{1*7}$$

(5) ***Column matrix*** :- a matrix with only one column and (m) rows

Ex:-

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{6*1}$$

(6) ***Lower triangular matrix*** :- a square matrix A= (a ij) n*n such that **aij = 0 for all i < j**

Ex:-

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}_{3*3}$$

(7) ***upper triangular matrix*** :- a square matrix A = (a ij) n * n such that **aij = 0 for all i > j**

Ex:-

$$A = \begin{pmatrix} 33 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -55 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}_{3*3}$$

(8) ***Identity matrix*** :- a square matrix of order n which every diagonal elements are equal to 1 and other elements are equal to 0 denoted by In

Ex:-

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3*3}$$

Note :- let A n*m be a matrix and In be identity matrix then

A .I = I .A = A

Special Matrices المصفوفات الخاصة

(1) Periodic Matrix المصفوفة الدورية

Def :- A matrix A such that $\mathbf{A^{K+1} = A}$ is called ***periodic matrix***, where **K** is positive integer number .

Ex :- Show that A is periodic matrix of degree two

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3*3}$$

(2)Idempotent Matrix مصفوفه متساوية القوى

Def :- A matrix A such that $\mathbf{A^2 = A}$ is called ***Idempotent matrix***

Ex :- Zero matrix is idempotent matrix .

H.W :- Give an example of an idempotent and periodic matrix .

(3) Nilpotent Matrix المصفوفة معدومة القوى

Def :- A matrix A such that $\mathbf{A^P = 0}$ is called ***Nilpotent matrix***, where P is positive integer number .

Ex :- Show that A is nilpotent matrix of degree two

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}_{3*3}$$

Sol:-

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^2 = A.A = 0$

(4)Transpo se Of Matrix منقول المصفوفة (مدور المصفوفة)

Def :- If $A=(aij)n*m$ then the matrix $\mathbf{A^T=(aji)m*n}$ obtained by interchanging rows and columns is called ***Transpose*** of A

ملاحظة :- اي ان A^T هي مصفوفة ناتجة من استبدال الاعمدة بدل الصفوف وبالعكس في المصفوفة A .

Ex :-

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -14 & 8 \\ -3 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & -1/4 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{3*4}$$

$$A^T=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1/4 \\ -14 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}_{4*3}$$

Theorem :- if A^T and B^T are transpose of A and B , and if K is any scalar number then :-

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(AB)^T = B^T . A^T$

(4) $(kA)^T = k A^T$

Proof البرهان :-

(1) let $A=(a_{ij})\ m*n$

L . H . S ناخذ الطرف الايسر

$(A^T)^T = ((a_{ij})^T\ m*n)^T$

$= ((a_{ji})n*m)^T$ by $\{ (a_{ij})^T\ m*n = (a_{ji})\ n*m \}$

$= (a_{ij})\ m*n$ by $\{ (a_{ij})^T\ m*n = (a_{ji})\ n*m \}$

$= A$

(2) let $A=(a_{ij})\ m*n$, $B=(b_{ij})\ m*n$

then $A^T=(a_{ji})\ n*m$, $B^T=(b_{ji})\ n*m$ by $\{ (a_{ij})^T\ m*n = (a_{ji})\ n*m \}$

L . H . S ناخذ الطرف الايسر

$(A+B)^T = [(a_{ij})m*n + (b_{ij})m*n]^T$

$= [(a_{ij} + b_{ij})\ m*n]^T$ by $\{ (a_{ij})\ m*n + (b_{ij})\ m*n = (a_{ij} + b_{ij})\ m*n$

$= [(c_{ij})\ m*n]^T$

by $\{ (a_{ij})^T\ m*n = (a_{ji})\ n*m \}$

$= [(c_{ji})\ n*m]$

$= [(a_{ji} + b_{ji})\ n*m]$

$= (a_{ji})\ n*m + (b_{ji})\ n*m$

$= A^T + B^T$

.***H .W*** :- prove (3,4)

(5)Symmetric Matrix المصفوفة المتنا ظرة

Def :- A square matrix A such that **$A = A^T$** is called ***Symmetric Matrix.***

Ex:- **Define and given an example of a symmetric matrix**

Sol :-

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad , \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$A = A^T$

Then A Symmetric matrix .

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & -7 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} , \quad B^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & -7 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = B^T$

Then B Symmetric matrix .

Theorem :- if A square matrix , prove that $A+A^T$ is symmetric matrix .

Proof :-

We must prove that

$[A + A^T]^T = [A + A^T]$

L . H . S

$[A + A^T]^T = [A^T + (A^T)^T]$, by $(A+B)^T = A^T + B^T$

$= A^T + A$, by $(A^T)^T = A$

$= A + A^T$, by $A + B = B + A$

Then $A + A^T$ is Symmetric matrix

(6)Skew -Symmetric Matrix المصفوفة المتنا ظرة عكسياً

Def :- A square matrix A such that $\mathbf{A = -A^T}$ is called

. ***Skew-Symmetric Matrix.***

Ex :-

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} , \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} , \quad -A^T = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = -A^T$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 5 \\ -1/3 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} , \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -5 \\ 1/3 & 0 & -7 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 5 \\ -1/3 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B = -B^T}$

Then **B Skew-Symmetric** matrix .

ملاحظة :- عند وضع مثال عن مصفوفة متناظرة عكسياً يجب ان تكون عناصر القطر الرئيسي تساوي صفر لكي لاتتغير الاشارة .

H . W :- (1) Give an example of Symmetric and Skew-Symmetric matrix such that the order of the matrix is (3*3) and (4*4) .

(2)*Theorem* :- if A square matrix , prove that $A-A^T$ is skew-symmetric matrix .

(7)Orthogonal Matrix — المصفوفة المتعامدة

Def :- A square matrix A such that $A.A^T = A^T.A = I$ is called ***Orthogonal Matrix*** **.**

Ex :-

$$A=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3*3}$$

Sol :-

$$A^T=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}_{3*3}$$

$$A\,.\,A^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3*3}$$

$$A^T.A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3*3}$$

$$\mathbf{A.A^T = A^T.A = I}$$

H . W :- (1) Give an example of ***Orthogonal Matrix*** such that the . order of the matrix is (3*3) and (4*4) .

(2) Give an example of **Orthogonal matrix** of the order (3*3) and (4*4).

(3) Solve Exc- (1.3) Page (33) ?

S_2- Linear Equations المعادلات الخطية

(1)Linear Equation المعادلة الخطية

Definition :- any equation that can be written in the form
$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots\dots\dots + a_n x_n = 0$, where a_1 , a_2 , ………, a_n are real constants and x_1 , x_2 , …. , x_n are variables , is called ***linear equation (first – degree equation)***

Ex :-

(1) $-7x + 5z = 6$

(2) $x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -13$

(3) $- m - h = 1/5$

(4) $z_1 + z_2 + z_3 - z_4 = 20$

(2)Solution of equation حل المعادلة

Def :- solve an equation is to find the elements of the variables that makes the equation true

(3) Solution set مجموعة الحل

Def :- the set of element of the variables that makes the equation true .

Remark ملاحظة

المعادلات التاليه ليست خطيه

(1) $xz + 3y = 3$

(2) $8x^5 - 2w = 1$

(3) $4x - \cos(y) = -2$

(4) $x_1 - 3x_2 - \mathrm{Ln}(x_3) = -36$

(4)System of linear equation منظومة المعادلة الخطية

Def ;- is set of (M) of linear equations which has (N) of variables which can be written in the form :-

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots\dots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots\dots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots\dots + a_{mn} x_n = b_m$$

حيث ان aij , I = 1 , ….. , m ; j = 1 , …. , n ثوابت (constants) تنتمي الى حقل الاعداد الحقيقية (R)

Remark :-

(1) The system of linear equation which has solution is called (***consistent system***)

(2) The system of linear equation which has no solution is called (***inconsistent system***)

(3) Any system of linear equations may have (no solution , exactly one solution , or an infinite number of solutions)

(5)System of Homogeneous Linear Equations منظومة المعادلات المتجانسة

-

Def :- A system of linear equations of the form

$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\, x_n = 0$

.

.

$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\, x_n = 0$

in which the constant terms are all zero is called ***system of homogeneous linear equations***

Ex (1)

$2x + 4y + 3w = 0 \longrightarrow L_1$

$x + 2y - 5w = 0 \longrightarrow L_2$

$2x - y + 2w = 0 \longrightarrow L_3$

Remark

(1)if n = m then the system has the only zero solution

(2) if m < n the system has infinite number of solution

Elementary Operations on Matrices العمليات الاولية على المصفوفات

(a) the interchange of two rows

(b) the multiplication of a row by an arbitrary non zero constant

(c) the addition of an arbitrary multiple of one row to another row in the matrix

Def :- if the system of linear equations of m equations in n variables is

$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$

$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}\, x_n = b_2$

. . . .

. . . .

$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}\, x_n = b_m$

then the matrix of the **coefficients** and the **constant** terms is called ***augmented*** matrix and can be written in matrix form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots. & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} & : & b_2 \\ : & : & & : & : & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots.. & a_{mn} & : & b_m \end{pmatrix}$$

Ex:-

$3X + 2Y - Z = 2$

$-4X + 4Y + 12Z = -4$

$5X - 3Y + 4Z = 0$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & : & 2 \\ -4 & 4 & 12 & : & -4 \\ 5 & -3 & 4 & : & 0 \end{pmatrix}$$

another way

let

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 12 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظة :- تكون المصفوفة A بالصيغة الصفية المدرجة اذا حققت الشروط التالية

1- الصفوف التي تتكون بكاملها من اصفار تكون اسفل المصفوفة .

2- الصف الذي لايتكون بكامله من اصفار فان اول عنصر غير صفري هو واحد ويسمى الدليل واحد

3- اي صفين غير متكونين بكاملهما من اصفار مثل الصف i ، i+1 فان الدليل واحد في الصف i+1 يقع على يمين الدليل واحد في الصف i

سؤال :-اي المصفوفات التالية تكون بالصيغة المدرجة صفيا ؟ ولماذا ؟ **Ex : -**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A: مدرجة ، B: غير مدرجة , C: غيرمدرجة ،D: مدرجة , E: غير مدرجة :,

S_3. Solution Of Linear Equations

1--By Gaussian Elimination

حل المعادلات الخطية بطريقة الحذف كاوس

Ex :- solve the following system of linear equations by Gaussian elimination
3X + 6Y +9Z = 27
2X – Y + Z = 8
3X – Z = 3

Sol :

$$A = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 6 & 9 & 27 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$1/3\, R_1 \longrightarrow R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$-2R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$

$-3R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$$

$-1/5\, R_2 \longrightarrow R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$$

$6R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 9 \\ 0 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & -4 & : & -12 \end{pmatrix}$$

$-1/4 R_3 \longrightarrow R_3$ (ألأن أصبحت المصفوفة بالصيغة المدرجة الصفية)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 9 \\ 0 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{pmatrix}$$

ألأن نحول المصفوفة الى نظام المعادلات الخطية

$X + 2Y + 3Z = 9$

$+ Y + Z = 2$

$Z = 3$

$\Rightarrow Z = 3$

by (2)

$Y + Z = 2 \Rightarrow Y = 2 - 3 \Rightarrow Y = -1$

By (3)

$X + 2Y + 3Z = 9 \Rightarrow X - 2 + 9 = 9 \Rightarrow X = 2$

Solution set $= \{2, -1, 3\}$

<u>Ex 1:-</u> solve the following system of linear equations by Gaussian elimination

$4X + 4Y + 8Z = -4$

$3X - 6Y + 3Z = -15$

$3X + Y + Z = 3$

EX : 2

$2X_1 + 2X_2 + 4X_3 - 10X_4 = 6$

$2X_1 + 5X_2 - X_3 - 9X_4 = -3$

$2X_1 + X_2 - X_3 + 3X_4 = -11$

$X_1 - 3X_2 + 2X_3 + 7X_4 = -5$

ملاحظة :-

اذا كانت المصفوفة بالصيغة الصفية المدرجة لكي تكون بالصيغة الصفية المدرجة المختزلة يجب ان تحقق الشرط التالي ((العمود الذي يحتوي على الدليل واحد تكون جميع عناصره الاخرى اصفار)) .

EX:-

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2- By Gaussian-Jordan Elimination

حل المعادلات بطريقة الحذف كاوس – جوردان

تعتمد هذه الطريقة على تحويل نظام المعادلات الخطية الى المصفوفة الممتدة للنظام ومن ثم تحويل هذه المصفوفة الى المصفوفة المدرجة الصفية المختزلة .

Ex 1:- solve the following equations by **Gaussian-Jordan** elimination

$X_1 + X_2 - X_4 = 0$
$2X_2 + X_3 - 2X_4 = 3$
$2X_1 + X_2 - X_4 = 0$
$X_1 + X_2 - 3X_3 = 1$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1 & : & 0\\ 0 & 2 & 1 & -2 & : & 3\\ 2 & 1 & 0 & -1 & : & 0\\ 1 & 1 & -3 & 0 & : & 1\end{pmatrix}$$

SOL :-

$-2R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$
$-R_1 + R_4 \longrightarrow R_4$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1 & : & 0\\ 0 & 2 & 1 & -2 & : & 3\\ 0 & -1 & 0 & 1 & : & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1 & : & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow 1/2\, R_2 \longrightarrow R_2 \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1 & : & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & : & 3/2\\ 0 & -1 & 0 & 1 & : & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1 & : & 1\end{pmatrix}$$

$R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad 2R_3 \longrightarrow R_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$3R_3 + R_4 \longrightarrow R_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

المصفوفة الان بالصيغة الصفية المدرجة يجب ان نحولها الى الصيغة الصفية المختزلة ويتم ذلك بطريقة الحذف تصاعديا :-

$R_4 + R_1 \longrightarrow R_1$
$R_4 + R_2 \longrightarrow R_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 23/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

$-1/2\, R_3 + R_2 \longrightarrow R_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

$-R_2 + R_1 \longrightarrow R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

$X_1 = 0$
$X_2 = 10$
$X_3 = 3$

$X_4 = 10$

<u>H . W</u>

EXC :- solve By Gauss –Jordan

NO (1) :-

$2X_1 + 2X_2 - 2X_4 = 4$
$4X_2 + 2X_3 - 4X_4 = 6$
$-X_2 + X_4 = -4$
$-3X_3 + X_4 = -1$

NO (2) :-

$2X_1 + 2X_2 - X_3 + X_5 = 0$
$-X_1 - X_2 + 2X_3 - 3X_4 + X_5 = 0$
$X_1 + X_2 - 2X_3 - X_5 = 0$
$2X_3 + 2X_4 + 2X_5 = 0$

NO (3) :

$-2X_1 + X_2 + X_3 = 8$
$3X_1 - 2X_2 - X_3 = 1$
$4X_1 - 7X_2 + 3X_3 = 0$

NO (4) :-

$2X_1 + X_2 + 3X_3 = 0$
$X_1 + 2X_2 = 0$
$2X_2 + 2X_3 = 0$

EXC :- solve By Gauss

NO (1) :-

$4X_1 + 8X_2 + 2X_3 = 16$
$3X_1 - 5X_2 - X_3 = 2$
$4X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 1$

NO (2) :-

$2X_1 + 2X_2 - 4X_3 + 2X_4 + 6X_5 = 2$
$3X_1 + 2X_2 - 4X_3 - 3X_4 - 9X_5 = 3$
$2X_1 - X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 6X_5 = 2$
$6X_1 + 2X_2 - 4X_3 = 6$
$2X_2 - 4X_3 - 6X_4 - 18X_5 = 0$

NO (3) :-

$X_1 + 3X_2 - 2X_3 + 2X_5 = 5$
$2X_1 + 6X_2 - 5X_3 - 2X_4 + 4X_5 - 3X_6 = 1$

$$5X_3 + 10X_4 + 15X_6 = 5$$
$$2X_1 + 6X_2 + 2X_4 + 18X_6 = 6$$

NO (4) :-

$$X_1 - 5X_2 - 8X_3 + X_4 = 3$$
$$3X_1 + X_2 - 3X_3 - 5X_4 = 1$$
$$X_1 - 7X_3 + 2X_4 = 5$$
$$11X_2 + 20X_3 - 9X_4 = 2$$

H.W

P . 47 (5 – 2)

P . 48 (10 – 7)

S_4- Inverse of matrix معكوس المصفوفة

Def :- If A square matrix and ,if there exists a square matrix A^{-1} such that $\mathbf{A.A^{-1} = A.A^{-1} = I}$,then we say that A^{-1} is an ***inverse*** of A .

EX:-

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A . A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} . A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

خواص المعكوس

Theorem(1):- **(1)** $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

Theorem(2):-

The inverse is unique if it exists .

Proof :-

Let A has two inverse B and C

Then $A.B = B . A = I_n$

And $A .C = C. A = I_n$

Now

$B = B . (I_n)$

$= B (AC)$

$= (BA) C$

$= I_n C$

$= C$

Then

$B = C$

طريقة ايجاد معكوس المصفوفة

اذا كانت المصفوفة ذات سعة n*n فان حساب معكوس المصفوفة A يكون بالشكل التالي :-

1- تكون المصفوفة ذات سعة n* 2n بالشكل التالي [A : In]

2- نحول المصفوفة الناتجة من الخطوة واحد الى المصفوفة المدرجة الصفية المختزلة ونحصل على الصيغة التالية [C : D]

3- أ- اذا كانت C= In فان $D = A^{-1}$

ب- اذا كانت C لا تساوي In فان C تحتوي على صف بكامله اصفار في هذه الحالة فان المصفوفة A غير قابلة للانعكاس فان A^{-1} غير موجودة

ملاحظة :- بصورة عامة

$$[A \setminus I] \longrightarrow [I \setminus A^{-1}]$$

EX:- Find A^{-1} of A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sol:-

$$[A \setminus I] \longrightarrow [I \setminus A^{-1}]$$

نستبدل R_2 بدل R_1

$$[A \backslash I] = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$-2R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad -2R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \qquad 1/11R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 4/11 & 1/11 \end{array}\right)$$

$$4R_3 + R_2 \longrightarrow R_2 \quad , \quad -2R_3 + R_1 \longrightarrow R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 4/11 & 3/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 0 & 3/11 & -6/11 & 4/11 \\ 0 & 0 & 1 & -2/11 & 4/11 & 1/11 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/11 & 3/11 & -2/11 \\ 3/11 & -6/11 & 4/11 \\ -2/11 & 4/11 & 1/11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = 1/11 \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = I \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} . 1/11 \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1/11 \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

EX :- Find A^{-1} of A

$$A= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[\, A\backslash I \,] \longrightarrow [\, I\backslash A^{-1}] \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-R1 + R3 \longrightarrow R3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لا يمكن اختزال A الى المصفوفة المختزلة لذلك لا يوجد معكوس

EXc : -Find A^{-1}

$$A= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} , \quad B= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} , \quad C= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

3- **Solve the Linear Equation By Inverse Of Matrix**

حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس للمصفوفة

EX :-

$X_1 + 2X_2 + 2X_3 = -1$

$X_1 + 3X_2 + X_3 = 4$

$X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 3$

Sol:-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

طريقة الحل :- نحول النظام الى المصفوفة الممتدة
ثم نجد لها المعكوس ثم نضرب المعكوس
في المصفوفة B لكي نحصل على قيم المتغيرات

$$A X = B$$

$$A^{-1} (AX) = A^{-1} B$$

$$(A^{-1} A)X = A^{-1} B$$

$$I . X = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B$$

(1) أيجاد معكوس المصفوفة A

$$[A \backslash I] \longrightarrow [I \backslash A^{-1}]$$

$$[A \backslash I] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$- R_1 + R_2 \longrightarrow R_2, -R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-2R_2 + R_1 \longrightarrow R_1 , \quad -R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & : & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-4R_3 + R_1 \longrightarrow R_1 , \quad R_3 + R_2 \longrightarrow R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) نضرب المصفوفة B بمعكوس A من جهة اليسار لكي نحصل على قيم المتغيرات

$X = A^{-1} B$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3+8-12 \\ 1+0+3 \\ 0-4+3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$X_1 = -7$

$X_2 = 4$

$X_3 = -1$

EXC:- **Solve the following system of linear equations by the invers method .**

NO (1) :-

$3X + 3Y + 6Z = 3$

$4X + 2Y = 0$

$X + 2Y + 2Z = -1$

NO (2) :-

$2X_1 + X_2 + 5X_3 + X_4 = 8$

$X_1 - 3X_2 - 6X_4 = 9$

$2X_2 - X_3 + 2X_4 = -5$

$X_1 + 4X_2 - 7X_3 + 6X_4 = 0$

$X_1 = 3$, $X_2 = -4$, $X_3 = -1$, $X_4 = 1$ الناتج

NO (3) :-

$-2X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 5$

$2X_1 + X_2 - 6X_3 = 10$
$-X_1 - 2X_2 = -5$

الناتج : $X_1 = 1 , \; X_2 = 2 \; , \; X_3 = -1$

NO (4) :-

$X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 1$
$2X_1 - X_2 + 5X_3 + 3X4 = -11$
$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 7X_4 = 10$
$4X_1 + 3X_2 + 7X_3 + 12X_4 = 0$

NO (5) :-
$3X_1 - 2X_2 + X_3 + X_4 = 4$
$X_1 + X_2 - 2X_3 - 4X_4 = 6$
$-2X_1 + 5X_2 - X_3 + X_4 = 6$
$X_1 + 3X_2 + 3X_3 - 3X_4 = 3$

NO (6) :-
$2X_1 - 3X_2 + X_3 = 5$
$2X_1 - X_2 + 4X_3 = 3$
$X_1 + 4X_2 + 2X_3 = 6$

Chapter Two

Determinants المحددات

2-1 **Def:-** For every square matrix there exist a function between the matrix and the value of scalar number , this function is called the ***Determinant*** of matrix ,and denoted by (**det(A)** or $|\mathbf{A}|$)

2-2 Method to found Determinant طرق ايجاد المحدد

1) IF $A_{1*1} = a \Longrightarrow |A| = a$

2) If $A_{2*2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = a_{11} . a_{22} - a_{12} . a_{21}$

Ex:-

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = (-8)(0) - (5)(7) = 0 - 35 = -35$$

3) If A_{3*3} **then**

ملاحظة :-

ان ايجاد المحدد في هذه الحالة يتم بالطريقة التالية (Diagonal expansion formula)

1- نضيف العمود الاول والثاني الى المصفوفة الاصلية

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2- تصبح المصفوفة بالشكل التالي

$$|A| = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right|$$

3- نصل بخطوط وهمية على اقطار المصفوفة الجديدة وكما يلي

$$\begin{matrix} + & + & + & - & - & - \end{matrix}$$

$$|A| = \left| \begin{matrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{matrix} \right| \begin{matrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{matrix} \right|$$

4- نحدد الخطوط الثلاثة الاولى باشارة موجبة والثلاثة الاخيرة باشارة سالبة

5- يتم ايجاد المحدد لهذه المصفوفة بالشكل التالي

(حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي + حاصل ضرب عناصر القطر الاول الموازي له + حاصل ضرب عناصر القطر الثاني الموازي له - حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي - حاصل ضرب عناصر القطر الاول الموازي له – حاصل ضرب عناصر القطر الثاني الموازي له) اي ان

$$\mathbf{A = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}}$$

Ex:-(1)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{find } |A|$$

Sol :-

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \quad - \end{array}$$

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right|$$

$|A| = (1)(2)(0) + (0)(-1)(0) + (3)(1)(-4) – (3)(2)0) – (1)(-1)(-4) – (0)(1)(0)$

$= 0 + 0 -12 - 0 – 4 – 0$

$|A| = -16$

Ex:- (2)

$$A=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/-6 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{find } |A|$$

Sol :-

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$$

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1/4 & 1/-6 & 1/2 & 1/4 & 1/-6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & -2 & 8 \end{array}\right|$$

$|A| = (1/4)(0)(0) + (1/-6)(-2)(-2) + (1/2)(0)(8) - (1/2)(0)(-2) - (1/4)(-2)(8) - (1/-6)(0)(0)$
$= 0+2/3-0-0+4-0$
$= 2/3 + 12/3$
$|A| = 14/3$

2-3 Properties Of Determinants خواص المحددات

TH(1):- If all elements of one row (or column) of A are zero ,then $|A| = 0$

Ex : - (1)

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$$

TH(2):- If there exist two rows (or columns) are equal then $|A| = 0$

Ex : - (2)

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 7 & -4 \\ 1/7 & 0 & 1/7 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$$

TH(3):- If two rows and (or columns) of A are interchanges then the determinant of the resulting matrix B is($-|A|$) , i.e $|B| = -|A|$.

Ex : - (3)

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow |A| = (3)(-1)(2) + 0 + 0 - 0 + 2 = -6 + 2 = -4$

But

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow |B| = 0 + 0 - 2 + 6 - 0 = 4$

<u>TH (4) :-</u> If two rows (columns) of matrix A are proportional ,then A= 0

Ex(4)

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$$

<u>TH (5) :-</u> If a matrix B results from a matrix A by multiplying all elements of A by K then $|B| \neq |KA|$, i.e ($|KA| \neq K|A|$)

Ex : - (5)

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} , K = 3 \Rightarrow |KA| = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 36 = -36$$

but

$$|A| = 0 - 12 = -12 \Rightarrow K|A| = 3(-12) = -18$$

Then $K|A| \neq |KA|$

<u>TH (6) :-</u> If a matrix C results from a matrix A by multiplying all elements in one row (or column) of A by K then $|C| = K|A|$, i.e ($|A| = 1/K|C|$)

Ex : - (6)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} , K = 2 \Rightarrow |KA| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -14 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 0 = -6$$

but

$$|A| = -3 + 0 = -3 \Rightarrow K|A| = 2(-3) = -6$$

Then $K|A| = |C|$

<u>TH (7):-</u> If a multiple of any row (or column) of a determinant is added to any other row (or column) ,then value of the determinant is not changed

<u>TH(8):-</u> The determinant of the product of two matrices is the product of their determinants i.e ($|AB| = |A|\,|B|$)

In general

$$|A_1 . A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots\ldots\ldots |A_n|$$

Ex : - (8)

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 9 \\ 1 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad , B=\begin{pmatrix} 0 & -6 & 9 \\ 5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Find $|A|$, $|B|$, $|AB|$, $|BA|$

<u>TH(9):-</u> If A triangular matrix then the determinant of A is equal the product of the elements of main diagonal i.e(A = $a_{11}.a_{22}.a_{33}..........a_{nn}$

Ex : - (9-1)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$$

Ex : - (9-2)

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 8 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (4)(5)(-1) = -20$$

Ex : - (9-3)

$$A=\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 0 \\ 15 & 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (-7)(8)(-2) = 112$$

<u>TH(10):-</u>

$$|A| = |A^T|$$

Ex : - (10)

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 33$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^T| = 33$$

<u>TH(11):-</u> $|\bar{A}| = \overline{|A|}$

Ex : - (11)

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ i & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ -i & +i \end{pmatrix}$$

$|A| = (1+i)(-i) - (2-i)i$
$= -i + 1 - 2i - 1$
$= -3i$

$|\bar{A}| = (1-i)(i) - (2+i)(-i)$
$= i + 1 + 2i - 1$
$= +3i$

$\overline{|A|} = 3i$

TH (12) :-

$$|A^{-1}| = 1/|A|$$

Ex : - (12)

Let $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Find $|A|$ **and** $|A^{-1}|$

Sol :-

$|A| = (3)(3) - (4)(3) = 9 - 12 = -3$

$|A^{-1}| = (-1)(-1) - (4/3)(1) = 1 - 4/3 = -1/3$

$|A^{-1}| = 1/|A|$

2-4 Cofactor Expansion & Applications

Def :- **The Cofactor of square matrix A is (cof(A) = Aij = $(-1)^{i+j}$ M ij**

ملاحظة :-

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة ذات سعة n*n ولتكن Mij مصفوفة جزئية من المصفوفة A ذات السعة $(n-1)*(n-1)$ والتي حصلنا عليها بعد حذف الصف i والعمود j يقال لمحدد Mij بانه مصفر العنصر aij من المصفوفة A

Ex : - (1)

Let $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, **Find cof (A)**

Sol:

ملاحظة :-

عند ايجاد العامل المرافق للمصفوفة A يجب ان نجد العامل المرافق لكل عنصر عناصر من المصفوفة وكما يلي

$$Cof(0) = A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 1(-16-3) = -19$$

$$Cof(1) = A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-12-2) = 14$$

$$Cof(2) = A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (+1)(-9+8) = -1$$

$$Cof(3) = A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(0+2) = -2$$

$$Cof(4) = A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (+1)(0+4) = 4$$

$$Cof(-1) = A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(0+2) = -2$$

$$Cof(-2) = A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (+1)(-1-8) = -9$$

$$Cof(-3) = A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(0-6) = 6$$

$$Cof(-4) = A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (+1)(0-3) = -3$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 14 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -9 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Exc : -(1)

Let $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1/2 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}$, **Find cof (A)**

Exc : -(2)

Let $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **Find cof (A)**

ايجاد المحدد بطريقة العامل المرافق

Theorem:- If $A = (a_{ij})_{n*n}$, Then

(1) $|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots\dots\dots\dots a_{in} A_{in}$ $\quad 1 < i < n$

OR

(2) $|A| = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots\dots\dots\dots a_{nj} A_{nj}$ $\quad 1 < j < n$

ملاحظة : -

(1) ان افضل طريقة للنشر تتم بدلالة العمود او الصف الذي يحتوي على اكبر عدد من الاصفار

(2) في النظرية اعلاه يتم ايجاد المحدد من خلال

(الحالة الاولى) بتثبيت الصف i وايجاد العامل المرافق لعناصر هذا الصف (Ai1, Ai2 ,... , Ain)

(الحالة الثانية) بتثبيت العمود j وايجاد العامل المرافق لعناصر هذا العمود (A1j, A2j , …, Anj)

(3) هذه الطريقة تستخدم عندما تكون (n > 3)

Ex : -

Let $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, **Find** $|A|$

Sol:- **الحل :-** نستخدم الحالة الاولى (سوف ناخذ الصف الاول ونطبق عليه النظرية)

$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} \longrightarrow \quad (i = 1)$

$= (0) A_{11} + (-1) A_{12} + (2) A_{13}$

الان يجب ان نجد العوامل المرافقة لعناصر الصف الاول اي A_{11}, A_{12}, A_{13} كما مر سابقا .

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1)(-6 - 0) = -6$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(3 - 0) = -3$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (1)(2 - 0) = 2$

$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$
$= 0(-6) + (-1)(-3) + (2)(2)$
$= 0 + 3 + 4$
$= 7$

نفس المثال السابق لكن سوف ناخذ العمود الثالث ونطبق عليه النظرية

$|A| = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}$
$|A| = (2) A_{13} + (0) A_{23} + (3) A_{33}$

الان نجد العوامل المرافقة لعناصر العمود الثالث اي A_{13}, A_{23}, A_{33} وكما يلي :

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2-0) = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(0) = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (1)(0+1) = 1$$

$|A| = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}$
$= (2)(2) + (0)(0) + (3)(1)$
$= 7$

وهكذا نستطيع ان نجد المحدد باستخدام اي صف او اي عمود مع مرافقاته .

ملاحظة : ـ بطريقة اكثر سهولة واسرع وقت (بخطوة واحدة) نستطيع ان نطبق النظرية على اي صف او عمود وكما يلي :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{-3} & \overset{+}{6} \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= +(1)\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (6)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$= (1)(-8-0) - (-3)(2-0) + (6)(8-0)$
$= -8+6+48 = 46$

Exc : -Evaluate the determinant of the following matrices by using cofactor

(1)

Let $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1/4 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, **Find** $|A|$

(2)

Let $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -2 & -1/4 & 2 \\ 1 & 7 & -0 \end{pmatrix}$, **Find** $|A|$

Exc:-Evaluate the determinant of the following matrices by using properties of determinant

(1) Let $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 & -2 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ -7 & -1 & -7 & -2 \end{pmatrix}$, **Find** $|A|$

(2) Let $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 3 \\ 3/2 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$, **Find** $|A|$

(3) Let $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 \\ 1/5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, **Find** $|A|$

(4) Let $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Theorem:- If $A = (a_{ij})_{n*n}$, Then

$$a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \dots + a_{in} A_{kn} = 0 , \quad \text{Where} \quad i = k$$

OR

$$a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \dots + a_{nj} A_{nk} = 0 , \quad \text{Where} \quad j = k$$

ملاحظة (توضيح النظرية) :-

- (الحالة الاولى) : - تعني هذه النظرية عند النشر باستخدام الصف I وايجاد العامل المرافق لعناصر صف اخر مثل(k) حيث ان (I ≠ k) فان مجموع حاصل ضرب عناصر الصف i في مرافقات الصف k يساوي صفر .

- (الحالة الثانية) :- (نفس الحالة الاولى فقط نستخدم في هذه الحالة العمود j بدل الصف i)

Ex : -

$$\text{Let } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol :-

الحل :- (نطبق الحالة الاولى)

(1) سوف ناخذ عناصر الصف الاول (i = 1)

(2) سوف نجد العامل المرافق لعناصر الصف الثالث (k = 3)

$$a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} = (2) A_{31} + (-3) A_{32} + (5) A_{33}$$

$$= (2)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-3) (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (5) (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2) (1) (6 - 0) + (- 3) (-1) (-4 - 5) + (5) (1) (0 + 3)$$

$$= 12 - 27 + 15 = 0$$

نطبق الحالة الثانية :- (1) ناخذ عناصر العمود الثاني (j = 2)

(2) نجد العامل المرافق لعناصر العمود الاول (k = 1)

$a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{32} A_{31} = ?$ ⟶ H . W

ملاحظة :-

من النظريتين (14 – 3) و (15 – 3) نحصل على

$$a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \dots + a_{in} A_{kn} = \begin{cases} |A| & \text{if } i = k \\ 0 & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

$$a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \dots + a_{nj} A_{nk} = \begin{cases} |A| & \text{if } j = k \\ 0 & \text{if } j \neq k \end{cases}$$

2- 5 Adjoint Of Matrix العامل المصاحب للمصفوفة

Def :- If A square matrix then the transpose of the matrix of cofactor of A is called the Adjoint of A , i.e **$(adj(A) = (cof(A))^T = (A_{ij})^T$**

$$adj(A) = (cof(A))^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ex : -

Let $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, Find adj (A)

Sol :- **الحل :-** (1) نجد العامل المرافق (cof (A)

(2) ثم نجد المنقول له لكي نحصل على العامل المصاحب (adj (A)) وكما يلي :

$Cof(a_{11}) = A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3-2) = -5$

$Cof(a_{12}) = A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(6-1) = -5$

$Cof(a_{13}) = A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (+1)(4+1) = 5$

$Cof(a_{21}) = A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-3-0) = 3$

$Cof(a_{22}) = A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (+1)(9-0) = 9$

$Cof(a_{23}) = A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(6+1) = -7$

$Cof(a_{31}) = A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (+1)(-1-0) = -1$

$Cof(a_{32}) = A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(3-0) = -3$

$$\text{Cof}(a_{33}) = A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (+1)(-3+2) = -1$$

$$\Rightarrow \text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & -7 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & -3 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

Exc : - (1)

Let $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1/4 & 5 \\ 1 & 0 & 2/4 \end{pmatrix}$ **, Find adj (A)**

Exc : - (2)

Let $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 5/2 \\ -1/6 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ **, Find adj (A)**

Exc : -(3)

Let $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **, Find adj (A)**

<u>Theorem :-</u> If An*n square matrix then

$$A(\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))A = |A| \ . \text{In}$$

Ex : - Evaluate the determinant of the following matrices by using adjoint of matrix

$$\text{Let } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sol :-

الحل :- لكي نطبق النظرية

(1) يجب ان نجد adj (A)

(2) نجد حاصل ضرب A في adj (A) من اليمين واليسار

(3) يجب ان يكون الناتج محدد مضروب في مصفوفة الوحدة

(4) نجد محدد A لكي نتحقق من الحل

$$(1)\quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & -3 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad A.(\text{adj}(A)) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & -3 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & +5 & +0 & 9 & -9 & +0 & -3 & +3 & +0 \\ -10 & +5 & +5 & 6 & -9 & -7 & -2 & +3 & -1 \\ -15 & -10 & +5 & 3 & +18 & -21 & -1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad A.(\text{adj}(A)) = -10\ I_{33}$$

(4)

$$|A| = \begin{vmatrix} \overset{+}{3} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{0} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (3)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3(-3-2) + (1)(6-1) + 0$
$= -15 + 5$
$= -10 \implies |A| = -10$

اذن تطبيق النظرية من جهة اليسار صحيح ونفس الحالة من جهة اليمين

Theorem :- If A square matrix and $|A| \neq 0$,then
$A^{-1} = 1/|A| .\ adj(A)$

Proof **البرهان**

By theorem
$A.(adj(A)) = |A|. I_n$
Since
$|A| \neq 0$
Then , multiply by $(1/|A|)$
$1/|A| (A.(adj(A)) = 1/|A| (|A|. I_n)$

$,(A). 1/|A| (adj(A)) = I_n$

multiply by (A^{-1})
$(A^{-1})(A). 1/|A| .(adj(A)) = A^{-1}. I_n$ by $(A^{-1}. A = I_n)$
$I_n. 1/|A| (adj(A)) = A^{-1}. I_n$

$1/|A| (adj(A)) = A^{-1}$ by $(A. I_n = A)$

$A^{-1} = 1/|A| (adj(A))$

ملاحظة : -
ان تطبيق هذه النظرية يعتبر طريقة جديدة لايجاد المعكوس للمصفوفة A

Ex : -

Let $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, Find A^{-1} by determinant of A

Sol :- **الحل :-** لايجاد المعكوس باستخدام النظرية اعلاه نتبع الاسلوب التالي

(1) نجد محدد A اذا كان لايساوي صفر نستمر بالحل اما اذا كان المحدد يساوي صفر فان المعكوس غير موجود ونتوقف عن الحل
(2) نجد adj (A)
(3) نطبق العلاقة $A^{-1} = 1/|A| (adj(A))$ ونجد الحل .

$$(1)\ |A| = \begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{3} & \overset{+}{1} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (+2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(2-6) - (3)(-1-0) + 1(-2-0)$$

$$= -8 + 3 - 2 = -7$$

$$|A| \neq 0 \Longrightarrow A^{-1} \text{ exists}$$

$$(2)\ \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 7 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(3)\ A^{-1} = 1/|A|\,(\text{adj}(A)) = 1/-7 \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/7 & 1/7 & -1 \\ -1/7 & -2/7 & +1 \\ -2/7 & 4/7 & -1 \end{pmatrix}$$

Exc:- Find A^{-1} by using the determinant of A

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1/4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2-6 Cramer 's Rule — حل المعادلات الخطية بواسطة (قاعدة كرامر)

Theorem:- If AX =B be system of linear equations which have (n) variables and (n) equations such that $|A| \neq 0$,then the system has one solution is

$$X_1 = |A_1| / |A| \quad , \quad X_2 = |A_2| / |A| \quad , \ldots , \quad X_n = |A_n| / |A|$$

حيث ان Aj المصفوفة الناتجة من تبديل عناصر المصفوفة B محل العمود j في المصفوفة A

Ex:- Solve the following equations by using Cramer 's rule

$$X + 2Y + 3Z = 2$$
$$2X + 5Y + 3Z = 3$$
$$X + 8Z = 4$$

Sol :-

الحل :- عند الحل باستخدام قاعدة كرامر نتبع الاسلوب التالي

(1) نحول النظام الى نظام المصفوفات

(2) نجد المحدد للمصفوفة الممتدة

(3) نجد المحدد للمصفوفات $|A1|$, $|A2|$, $|A3|$

(4) ثم نطبق القاعدة

(1)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A X = B

(2) $|A| = 1(40) - 26 - 15 = -1 \neq 0$

(3)

$$A1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow |A1| = 2(40) - 2(12) + 3(-20)$$
$$= 80 - 24 - 60$$
$$= -4$$

$$A2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow |A2| = 1(12) - 2(13) + 3(5)$$
$$= 12 - 26 + 15$$
$$= 1$$

$$A3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A3| = 1(20) - 2(5) + 2(-5)$$
$$= 20 - 10 - 10$$
$$= 0$$

(4)

$$X = |A1| / |A| = -4 / -1 = 4$$

$$Y = |A2| / |A| = 1 / -1 = -1$$

$$Z = |A3| / |A| = 0 / -1 = 0$$

$$\text{Solution Set} = \{ 4, -1, 0 \}$$

ملاحظة :-

(1) ان قاعدة كرامر قابلة للتطبيق في حالة كون عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل

(2) يجب ان يكون محدد A (مصفوفة المعاملات) لايساوي صفر

(3) تصبح قاعدة كرامر غير كفوءة من الناحية الحسابية عندما تكون $n > 4$ (حيث n يمثل عدد المعاملات وهو يساوي عدد المجاهيل) ومن الاحسن عندئذ استعمال طريقة كاوس جوردن .

Exc:- باستخدام قاعدة كرامر حل نظام المعادلات التالية

(1)
$$X1 + 2\,X3 = 6$$
$$-3\,X1 + 4\,X2 + 6\,X3 = 30$$
$$-X1 - 2\,X2 + 3\,X3 = 8$$

(2)
$$X1 + 2\,X2 + 3\,X3 = 6$$
$$2\,X1 - 2\,X2 + 5\,X3 = 5$$
$$4\,X1 - X2 - 3X3 = 0$$

(3)
$$X1 + X2 = 3$$
$$X2 + 2\,X3 = 2$$
$$X3 + 3\,X4 = 1$$
$$4\,X1 + X4 = 0$$

(4)
$$X1 + 2\,X2 + X3 = 0$$
$$3\,X1 - X2 - 2\,X3 = 9$$
$$4\,X1 + 3\,X2 - 3\,X3 =$$